874. 重複核ノ固有値ニ就テ

佐藤常三（奉天鉱工技術院）

$K_n(x, y)$ ヲ $K(x, y)$ ノ第 n 重複核トスレバ

(A) λ ヲ K ノ固有値, φ ヲ λ ニゾクスル固有函數トスレバ λ^n ハ K_n ノ固有値トナリ, φ ハ亦 λ^n ニゾクスル固有函數トナル。

ト云フコトハ十分知ラレテヰル。又若干技巧的ナ方法ニヨツテ (Vivanti-Schwank, (1929) P.P. 119–120) 次ノ定理モ証明サレテヰル。

(B) λ ガ K_n ノ固有値ナレバ, $\sqrt[n]{\lambda}$ ノ少クトモ一ツハ K ノ固有値トナル。

コノ証明ハ私ノ散見シタ参考書デハ對稱核ノトキダケデ, 僅カニ上記 Vivanti ノ著書ガ一般核ノ場合ヲ取扱ツテヰルヤウニ思ヘル。

(A) ヲ一般化シタ場合, コレモヨク知ラレテヰル. 即チ

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\cdots + a_n x^n$$

ニヨッテ定義サレル多項核ヲ

$$f(K) = a_1 K + a_2 K_2 + \cdots\cdots + a_n K_n$$

トカケバ

(A′) λ ヲ K ノ固有値, φ ヲ固有函數トスレバ, $1/f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ ハ多項核 $f(K)$ ノ固有値トナリ, φ モ亦固有函數トナル。

(A)ニ對スル(B)ノ如クニ，(A')ニ對シテ

(B') λヲ多項核 $f(K)$ ノ固有値トスレバ，$\frac{1}{\lambda}=f\left(\frac{1}{x}\right)$ ノ少クトモ一根ハKノ固有値トナル。

トイフ定理ガ考ヘラレル。Kガ對称核ナルトキハ既ニ二三ノ著者ガ1912—1913頃函數ノ変換群ヲ研究スル途次副産物トシテ，コノ定理ヲ得テキル。一般ノ場合ニ對シテモ巧妙ナ証明ガ行ハレテアルニ相違ナイト思フガ，最近私ノ試ミタ証明ヲ紹介シタイ．寔ニ貴重ナ紙面ヲ汚シテ恐縮デスガ。

マヅ假定ニヨレバ

$$(1)\quad \varphi(x)=\lambda\int_0^1 f(K(x,y))\varphi(y)\,dy$$

代數方程式 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\lambda}$ ノ一根ヲ α トオケバ

$$(2)\quad a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)+a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+\cdots\cdots+a_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n=\frac{1}{\lambda}$$

便宜上以下 $\int K\varphi=\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy$ ト略記シ，新函數

$$(3)\quad \omega=\varphi+b_1\int K_1\varphi+b_2\int K_2\varphi+\cdots\cdots+b_{n-1}\int K_{n-1}\varphi$$

ヲ導入スル，但シ係數 b'_p ハ次ノ如クニキメル：

$$(4)\quad \alpha-b_1=\lambda a_1,$$

$$\alpha b_1-b_2=\lambda a_2,\ \cdots\cdots,\ \alpha b_{n-2}-b_{n-1}=\lambda a_{n-1}$$

コレヨリ

$$(4')\quad \begin{cases} b_1=\alpha-\lambda a_1 \\ b_k=\alpha^k-\lambda a_1\alpha^{k-1}-\cdots\cdots-\lambda a_{k-1}\alpha-\lambda a_k,\ (k=1,2,\cdots,n-1) \end{cases}$$

トナルカラ，α ニ對シテ b_s' ハ悉ク單一的ニキマル．(2),(4′)ニヨレバ

(5) $\alpha b_{n-1} = \lambda a_n$

ナル關係ガ成立スル．何者，

$$\alpha b_{n-1} - \lambda a_n = \alpha^n - \lambda a_1 \alpha^{n-1} - \cdots\cdots - \lambda a_{n-1}\alpha - \lambda a_n$$

$$= \lambda\alpha^n\left\{\frac{1}{\lambda} - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right\} = 0$$

扨テ (3) ヲ (4) ニヨッテ變形スレバ

$$\omega = \varphi + (\alpha - \lambda a_1)\int K_1\varphi + \sum_1^{n-2}(\alpha b_k - \lambda a_{k+1})\int K_{k+1}\varphi$$

$$= \varphi + \alpha\left[\int K_1\varphi + \sum_1^{n-2} b_k\int K_{k+1}\varphi\right] - \lambda\int\left[a_1 K + a_2 K_2 + \cdots\cdots\right]\varphi$$

$$= \varphi + \alpha\int K_1\varphi + \alpha\int K_1\left[\sum_1^{n-2} b_k\int K_k\varphi\right]$$

$$- \lambda\int\left[f(K) - a_n K_n\right]\varphi$$

(3)ヲ用フレバ

$$= \varphi + \alpha\int K_1\omega - \lambda\int f(K)\varphi + (\lambda a_n - \alpha b_{n-1})\int K_n\varphi$$

(1),(5)ヲ用ヒレバ

$$= \alpha\int K\omega$$

コレハ ω ガ $\neq 0$ ナレバ，α ガ K ノ固有値ニシテ，ω ガコレニゾクスル固有函數デアルコトヲ示ス。

サテ(2)ヲ充スαノ値ヲ

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$$

トシ，α_iニ對應シテ(4)ニヨッテ決定サレルb'_pノ値ヲ

$$b_{i1}, b_{i2}, \cdots\cdots, b_{in-1}$$

トカケバ，(3)ヨリ$\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n$〔$\alpha_i$ニ對シテ$\omega_i$ガ〕ガ得ラレル。由テ次ノコトガ云ヘル：若シモ$\omega_i \neq 0$ナレバ，$\alpha_i$ガKノ固有値トナリ，$\omega_i$ガソレニゾクスル固有函數トナル。

特ニω'_pガ悉ク$\equiv 0$トナル場合ニハ(4)ノb'_pヲ以テ

$$g(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots\cdots + b_{n-1} x^{n-1}$$

トカケ。シカルトキハ假定ニヨリ(3)ハ

$$\varphi = -\int g(K)\varphi$$

トナル．コレハ多項核$g(K)$ガ-1ヲ固有値ニ有ツコトヲ示ス。

茲ニ於テ前述ノ事柄ヲ繰返ス；即チ(2)ニ對應シテ

$$b_1\left(\frac{1}{\beta}\right) + b_2\left(\frac{1}{\beta}\right)^2 + \cdots\cdots + b_{n-1}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{n-1} = -1$$

ナル如キβヲ求メ，コレニ對シテ

$$\beta - c_1 = -b_1,\quad \beta c_k - c_{k+1} = -b_{k+1}\ (k=1,2,\cdots,n-3)$$

ヨリc'_pヲ單一的ニ決定スレバ，(5)ト同樣ニ

$$\beta c_{n-2} + b_{n-1} = 0$$

ヲ証明スルコトガ出来，且ツ (3) ト同様ニ

$$\eta = \varphi + c_1\int K_1\varphi + \cdots\cdots + c_{n-2}\int K_{n-2}\varphi$$

トオケバ，

$$\eta = \beta\int K\eta$$

ガ得ラレル．従ツテ $\eta \neq 0$ ナレバ β ガタシカニ K ノ固有値トナル。

サテコヽニ注目スベキハ β ハ (2) ノ根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ ノ一ツヲ表ハスコトデアル。何ントナレバ (4), (5) ニヨレバ

$$\begin{aligned}\lambda f(x) &= \lambda a_1 x + \cdots\cdots + \lambda a_{n-1}x^{n-1} + \lambda a_n x^n \\ &= \alpha[x + b_1x^2 + \cdots\cdots + b_{n-1}x^{n-1}] \\ &\quad -[b_1x + b_2x^2 + \cdots\cdots + b_{n-1}x^{n-1}] \\ &= \alpha x + (\alpha x - 1)g(x),\end{aligned}$$

コレヲ利用スレバ $\left(g\left(\frac{1}{\beta}\right) = -1\right.$ ニ注意シテ$\left.\right)$

$$\lambda f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta} + \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)(-1) = 1$$

$$\therefore\ f\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\lambda}$$

トナルカラ

次ニ若シモ，スベテ β ニ對シテ，ソレゾレニ應ズル η ガ悉ク恒等的零トナルナラバ，再ビ上述ノ論法ヲ繰返ス

コトニスル。

何回目ニモ ζ ノ如ク作ル函数ガ皆 $\equiv 0$ トナルナラバ，$\varphi \equiv 0$ ト云フ矛盾ニ到達シテ了フカラ，タトヘバ初メヨリ j 回目ニハ $\zeta \not\equiv 0$ ニシテ $\zeta = \gamma \int K \cdot \zeta$ ナル如キ γ, ζ ガ存在シ，且ツ γ ハ

$$d_1\left(\frac{1}{\gamma}\right) + d_2\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 + \cdots\cdots + d_{n-j+1}\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-j+1} = -1$$

ヲ満足シ，同時ニ $f\left(\frac{1}{\gamma}\right) = \frac{1}{\lambda}$ トナル如キ番号 j ガ必ズ見出サレル。コレデ（B'）ガ証明サレタヤウニ思フ．

コレデ K ノ固有値ヲ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\cdots$ トカケバ, $f(K)$ ノソレハ $1/f\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)$, $i = 1, 2, \cdots\cdots$, デアルコトハ勿論デアル。又 K ト $f(K)$ トガ交換可能デアルカラ對稱核ノ場合ト同様ニ証明ガ遂行出来ルカモ知レナイガ，係數ニ關スル *characteristic determinant* ノ *rank* ニツイテ，種々ノ場合ガ論議サレテ相當複雑化シナイカト怪シマレル。

［満洲國立大学奉天工鉱技術院ニテ］